

# 从不同视角解析数学教科书中的习题<sup>①</sup>

## ——以“漏壶”问题为例

温建红 王 列

(西北师范大学教育学院 730070)

### 1 问题的提出

新课程实施以来,数学教材的整体面貌发生了很大的变化,这除了表现在教材的正文中,在习题的配备上也有所体现.与之前的教材相比,新教材中的很多习题不再是单一的解题,而是有了丰富的背景知识,它们或涉及自然与社会中的实际问题,或与学生的生活实际、相关学科紧密相联系.习题的设计除了着眼于所学知识的巩固与应用,还渗透了许多数学史和数学文化等方面的内容,这对于学生情感、态度、价值观的培养都有很好的作用.然而,在教学实践中,大多数教师往往只关注如何求解,获得正确答案,对于习题中渗透的其他丰富内涵挖掘不够,使得习题所包含的教育价值没有得到充分的体现.

在2013人教版“义务教育教科书·数学”八年级下册,第十九章第一节“函数”中有这样一道习题:“漏壶”是一种古代计时器(如图1所示).在它内部盛一定量的水,水从壶下的小孔漏出,壶内壁有刻度,人们根据壶中水面的位置计算时间.用 $x$ 表示漏水时间, $y$ 表示壶底到水面的高度.下面哪个图象适合表示 $y$ 与 $x$ 的对应关系?(不考虑水量变化对压力的影响.)<sup>[1]</sup>

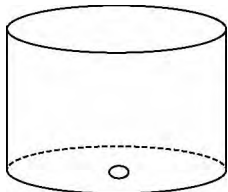
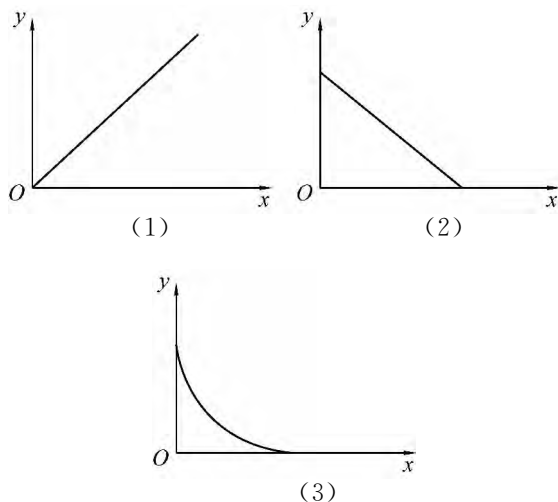


图1



面对这道习题,多数教师一般会带领学生这样分析:随着时间的增大,壶底到水面的高度 $y$ 不可能增大,只会减小,故可先排除选项(1);题目注明说不考虑水量变化对压力的影响,那么在相同的时间间隔内水流出的量是相同的,水面下降的高度是相同的,即可排除选项(3);而且当在一定的时刻,壶内的水流完,壶底到水面的高度 $y=0$ ,所以在不考虑水量变化对压力的影响的条件之下,通过排除法很容易得到选项(2)这个正确答案.

到此,这道习题的教学也就宣告结束.而学生则还显得意犹未尽,古代计时器——漏壶,这是怎么回事,是通过什么原理来计时的?题目中注明不考虑水量变化对压力的影响,如果要考虑这一因素,又会如何?学生的这些好奇与困惑,正是教师在备这道习题时所忽略的.教师的目的是选

<sup>①</sup> 本文是全国教育科学“十二五”规划2011年度教育部重点课题“新课程改革背景下数学合作学习典型案例研究”(课题批准号:G1A117013)的研究成果之一.

出正确答案即可,而对于学生而言,他们想从这个问题中知道更多,包括数学知识与文化,数学思想与方法,数学与其他学科的联系等等.显然,教师要对题目所包含的各种信息做进一步的挖掘.

## 2 从不同视角解析习题

### 2.1 数学文化视角

《义务教育数学课程标准(2011年版)》提出,数学是人类文化的重要组成部分,数学素养是现代公民应该具备的基本素养.作为促进学生全面发展教育的重要组成部分,数学教育既要使学生掌握现代生活和学习所需要的数学知识与技能,更要发挥数学在培养人的思维能力和创新能力方面的不可替代的作用.<sup>[2]</sup>习题教学是数学教学中的重要内容,很多习题都有着丰富的背景知识、数学文化、数学史方面的内容,还有与其他学科的联系等,教师应在这些方面深入挖掘,并将其作为解题的重要组成部分展现出来.让学生通过问题的解决,不仅能得到正确答案,还能了解题目中蕴含的数学文化,感受数学与人类社会生活、数学与其他学科的紧密联系.

中国古代计时器分为日晷、漏刻、机械计时器、轮漏、木漏五大系统.<sup>[3]</sup>漏壶也叫漏刻,是中国古代最重要的计时仪器之一.漏,指漏壶,即底部带有一个泄水小孔的容器;刻,指箭刻.箭,就是标有时刻度的标尺,它是根据漏壶中的水量变化来度量时间的.漏壶主要有泄水型和受水型两类,壶的底部开一个小孔让水滴漏,观测壶内的水量减少量来计算时间,这种漏壶叫泄水型漏壶;观测壶内的水的增加量来计算时间,这种叫做受水型漏壶.<sup>[4][5]</sup>

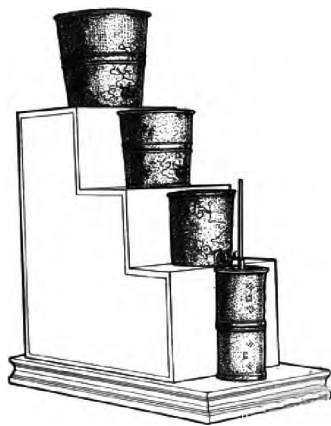


图2 复式漏壶

中国历史上的时间计量是把1日分成100刻或12个时辰:子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥,即以十二地支计时.每个时辰又分为初、正两个部分.实际上也把1日分成了24小时.而每个时辰又含8刻,一天共96刻,余下的4刻,上下半天各分2刻.至今保存最早的漏刻,是西汉时制造的.据史籍记载,漏刻的发展大致为,由单壶为多级壶,改沉箭法为浮箭法.东汉时,张衡改单壶为双壶,改沉箭为浮箭.为了尽量保持漏壶水量基本不变,水滴入受水壶速度均匀,从而提高计时的准确性,后来经过不断改进,漏壶多至三级、四级,以三级漏壶使用最为广泛.如图2为后来发展的多级漏壶的一种.<sup>[6]</sup>

早期漏刻的形式一般比较简单,只有一只简单的壶,壶的底部开有一小口,使用方法是把壶装满水,然后任其泄流,流完一壶为1单位时间,如果需要,再将壶灌满,重复使用.这种单壶泄水型漏壶,只适应于对计时的精确性要求不高的场合.为了计时方便,人们便在漏壶的壶壁上刻一些用来表示时刻的标记,当水面高度降低到某一标记时,人们就可以粗略地读出所对应的时刻.但这种方法还不是很方便,后来人们又作了进一步地改进,将一根刻有时刻标记的木条或竹竿竖直插入壶内,通过察看壶内木条被水面浸淹的部位,然后根据木条、竹竿上的时刻标记就可方便地读出时刻,这种方法又称“淹箭法”.



图3 西汉铜漏

如图3是西汉满城铜漏.下有三足,通高22.4厘米,壶身接近壶底处有一小管外通.壶盖上有方形提梁,壶盖和提梁有正相对的长方形小孔各

一个,作为穿插刻有时辰的标尺之用,壶中的水从小管逐渐外漏,标尺逐渐下降,可观察时辰之变化.这就是前面提到的单壶泄水型沉箭漏.从壶的高度分析该壶很小,从一壶水装满到泄放结束估计不足一个时辰或一、二刻钟,壶中水量排放从满壶到浅,先后流量不一,故其计时精度不会高,只能作为日常生活工具.

从最早的日晷计时到最后发展为更成熟的计时仪器,每一系统都有自己的原理,每一计时器的发展都伴随着人类文明的传承与科技的进步.它不仅体现了古代人民的智慧,更体现了数学在实际生活中的重要作用.在实际教学中,有关“漏壶”的历史与文化,可以由教师介绍出来,也可以布置为作业,让学生利用图书馆或网络查阅,自己讲解.通过这个习题的学习,学生了解了我国古代计时器发明、发展的过程,会真切感受到我国古代科技和文明的成果,树立民族自豪感和自信心.

### 2.2 数学建模视角

随着信息技术的飞速发展,数学更加广泛地应用于社会生产生活的各个方面.体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系,运用数学的思维方式进行思考,增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力,是数学课程的重要目标之一.<sup>[7]</sup>在数学教学中,将数学建模思想渗透到问题解决的过程中,是实现这一目标的重要途径.新课改以来,应用性问题的教材中占有相当大的比重,如果教师在解决这类问题时,能引导学生运用数学建模思想解决问题,对于培养学生自主探究、提出问题、分析问题和解决问题的能力都会有很大的帮助.

“漏壶”是早期简单应用的一种泄水型漏壶,有一定的实用性,不论是给漏壶内壁刻上用来表示时刻的刻度还是将一根刻有时刻标记的木条或竹竿竖直插入壶内刻画时间,刻画刻度是一大难题也是必须要解决的问题.在了解了问题的背景后,就需要思考:可以建立怎么样的数学模型,来刻画壶底到水面的高度和时间之间的关系?

对于初中学生而言,对函数概念已经有了初步的认识,学习了一些简单的函数模型,会根据情境列出函数表达式,列表、描点、连线画出对应的函数图象,能够根据函数图象判断函数的增减性.为此,本题可以让学生尝试从数学建模的视角来

思考解决.

解:设容器的高为  $h$ ,容器底面圆半径为  $r$ ,则此容器的容积为  $\pi r^2 h$ .

不考虑水量变化对压力的影响,设相同的时间间隔内从小孔流出的水量为  $v$ ,则时间为  $x$  时,流出的水量为  $vx$ ,则剩余水量为  $\pi r^2 h - vx$ ,由此可以得出

$$\pi r^2 h - vx = \pi r^2 y.$$

化简得  $y$  和  $x$  之间的关系表达式为  $y = h - \frac{vx}{\pi r^2}$ .

$y$  是  $x$  的一次函数,并且当  $x=0$  时,  $y=h$ ; 当  $x = \frac{\pi r^2 h}{v}$  时,  $y=0$ .

表 1

时间 ( $x$ )	0	1	$x = \frac{\pi r^2 \cdot h}{v}$
距离 ( $y$ )	$h$	$y = h - \frac{v}{\pi r^2}$	0

从函数表达式  $y = h - \frac{vx}{\pi r^2}$ ,更能清晰的看出壶底到水面的高度与时间之间的关系,进而直接选出选项(2).

### 2.3 跨学科视角

加强数学与其他学科的融合是新课程改革的要求之一,现代社会数学与其他学科的联系越来越密切,已经渗透到各个学科、各个领域.数学存在自然生活的各方面,其许多内容与物理、化学、生物等其他学科知识有着密切的联系.

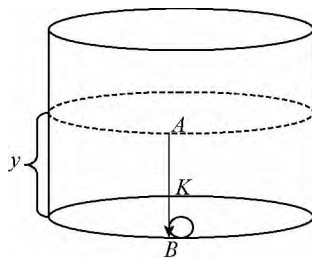


图 4

在“漏壶”问题中,首先要解决的一大难题就是刻度的问题,尽管在这道习题中,特别说明不考虑水量变化对压力的影响,但从实际情境考虑,漏壶内水量变化对小孔水流速度会有一定的影响.当考虑到这一因素时,就需要将数学与物理学等知识结合起来思考.刚开始,水装满的情况下,水

对底面的小孔的压力大,水从小孔流出的速度快,随着容器内水量的减少,水对底面小孔的压力越来越小,所以水流速度越来越慢,直至水全部流完.要用这样一个容器来刻画时间,要在漏壶内壁刻上不均匀的刻度来代表均匀的时间变化.怎样刻画出壶底到水面的高度  $y$  和时间  $x$  之间的关系?这需用到有关流体力学方面的知识.

解:考虑漏壶中的液体为无粘性不可压缩流体,由于漏壶内液体横截面积  $S_A$  远远大于小孔横截面积  $S_B$ ,即  $S_A \gg S_B$ .漏壶内液面的下降速度非常缓慢,可用准定常理论处理此问题.从自由面的点  $A$  处开始垂直向下,终止于出口的点  $B$  处取流线  $AKB$ ,如图 4 所示.将伯努利积分应用于点  $A$  和点  $B$ ,由伯努利方程

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \quad (1)$$

其中  $P_A, P_B$  分别为  $A, B$  处的压强,  $v_A, v_B$  分别为  $A, B$  处流体的流速,  $h_A, h_B$  分别为漏壶内液面的高度和小孔处器壁的厚度,  $\rho$  为流体的密度,  $g$  为常量 ( $g = 10 \text{ N/kg}$ ).<sup>[8]</sup> 考虑到  $A, B$  处压强均为大气压强,即  $P_A = P_B = P_0$ . 不计小孔  $B$  处漏壶的壁厚,即  $h_B = 0$ ,记  $h_A = y$ . 于是(1)式可变为

$$\frac{1}{2}v_A^2 + gy = \frac{1}{2}v_B^2 \quad (2)$$

由连续性方程

$$S_A v_A = S_B v_B \quad (3)$$

将(3)式代入(2)得

$$v_A = \left[ \frac{2gy}{(S_A/S_B)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (4a)$$

$$v_B = \left[ \frac{2gy}{1 - (S_B/S_A)^2} \right]^{1/2} \quad (4b)$$

由于  $v_A = -\frac{dy}{dx}$ , 于是有

$$\frac{dy}{dx} = - \left[ \frac{2gy}{(S_A/S_B)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (5)$$

变形得

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = - \left[ \frac{2g}{(S_A/S_B)^2 - 1} \right]^{1/2} dx \quad (6)$$

对(6)式两边同时定积分,并利用初始条件  $t=0, y=H$  得

$$\sqrt{y} = \sqrt{H} - \frac{1}{2} \left[ \frac{2g}{(S_A/S_B)^2 - 1} \right]^{1/2} x \quad (7)$$

由于  $S_A \gg S_B, (S_A/S_B)^2 - 1 \approx (S_A/S_B)^2$  有

$$y = \left[ \sqrt{H} - \sqrt{\frac{g}{2} \frac{S_B}{S_A} x} \right]^2 \quad (8)$$

$$v_B = \sqrt{2gy} \quad (9)$$

(8)式即为壶底到水面的高度  $y$  和时间  $x$  的函数关系式,其中  $H$  为初始液面高度.

若取  $H=100, S_B/S_A=0.01$ , (8)式变为  $y = (10 - \sqrt{0.0005x})^2$ , 图象如下

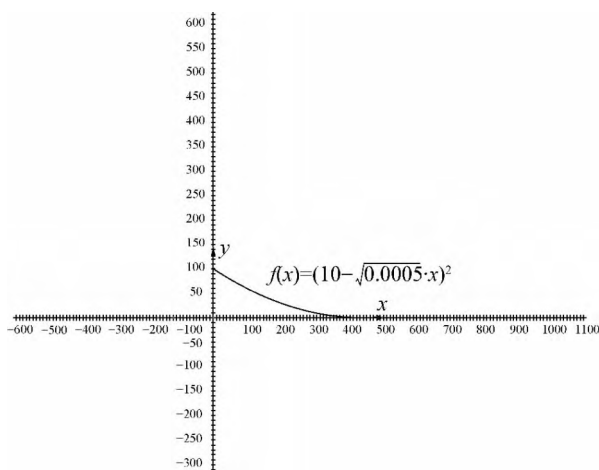


图 5

由此图象可看出,如果将教科书中习题的说明“不考虑水量变化对压力的影响”去掉,在考虑水量变化对压力的影响时,壶底到水面的高度  $y$  和时间  $x$  之间的对应关系就不再是选项(2),而是选项(3).同时,从(9)式:  $v_B = \sqrt{2gy}$ ,进一步验证了前面的猜想,随着壶底到水面高度  $y$  的减小,小孔水流速度  $v_B$  也减小.如果要想小孔的水流速度恒定,漏壶应该做成什么形状呢?诸如此类拓展性问题,都可以提出来让学生去思考.

#### 参考文献

- 林群主编.义务教育课程标准实验教科书·数学(八年级下册)[M].北京:人民教育出版社,2013,10
- 7 中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2012,1
- 李迪,邓可卉.关于中国古代计时器分类系统的探讨[J].内蒙古师大学报,1997,4
- 莫秀秀.中国古代计时器设计研究[D].山东师范大学,2009
- 李海,崔玉芳.李兰漏刻——中国古代计时器的重大发明[J].雁北师范学院学报,2002,2
- 丘光明.漏刻[J].中国质量技术监督,2002,4
- 周光炯等.流体力学(第二版)(上册)[M].北京:高等教育出版社,2000,6